**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Факультет прикладной математики и информатики

Исследование операций

Лабораторная работа №2

**Подготовил**

студент 3 курса 3 группы

Алексеенко Иван Юрьевич

**Преподаватель**

Исаченко А.Н.

**Стр 19 № 22. Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:**

***a) , ,***

где ,

при условии . Здесь *a*, *b*, *α*, *β* – положительные константы;

*Решение:*

f1(x) возрастает, если a < b , и убывает, если a > b. f2 достигает максимума в точке α α+β. Таким образом, имеем:

Множество Парето =

***b) , ,***

где ,

при условии , *i*=1,2.

*Решение:*

f1(x) возрастает с ростом x1 или x2, f2(x) возрастает с ростом x1, убывает с ростом x2. Значит, множество Парето = {1}×[0,1], т.к. при fix x2 обе функции достигают максимума в точке x1 = 1 и возрастают с ростом x1.

**c) ,**

где , , ,

при условии .

*Решение:*

Если выразить переменную x3 через x1 и x2, а именно: x3 = 1−x1−x2, то множество Парето:

{(x1,x2,x3) | x1 = x2 ≥ }∪{(x1,x2,x3) | x1 = x3 ≥ }∪{(x1,x2,x3) | x2 = x3 ≥ }

**Стр 21 № 1. Показать, что матричная игра с матрицей *H=(hij)nxm*  имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:**

***a) hij = f*(*i*) *- g*(*j*)**

*Решение:*

Найдем нижнее и верхнее значение игры:

Т.к. верхнее и нижнее значения игры равны, то она имеет решение в чистых стратегиях: .

*b) hij = f(i) + g(j)*

*Решение:*

Найдём нижнее и верхнее значения игры:

***c) , a, b, c, d – произвольные числа;***

*Решение:*

Рассмотрим все возможные варианты отношений чисел a,b,c,d.

Если находим седловую точку => игра разрешима в чистых стратегиях.

В таблице под приоритетом, например, 1 2 3 4 имеется в виду, что a<b<c<d.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Приоритет | | | | | |  |  |  |  | *α* |  |  | *β* | Игра разрешима в чистых стратегиях | Оптимальная стратегия для (первого игрока, второго игрока) |
| a | b | | c | | d |
| 1 | | 2 | | 3 | 4 | a | c | a | b | c | c | d | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 1 | | 2 | | 4 | 3 | a | d | a | b | d | c | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 1 | | 3 | | 2 | 4 | a | c | a | c | c | c | d | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 1 | | 3 | | 4 | 2 | a | d | a | b | b | c | b | b | + | (1,2) , (4,2) |
| 1 | | 4 | | 2 | 3 | a | c | a | c | c | c | b | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 1 | | 4 | | 3 | 2 | a | d | a | c | c | c | b | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 2 | | 1 | | 3 | 4 | b | c | a | d | c | c | d | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 2 | | 1 | | 4 | 3 | b | d | a | b | d | c | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 2 | | 3 | | 1 | 4 | a | c | a | c | a | a | d | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 2 | | 3 | | 4 | 1 | a | d | d | b | b | c | b | b | + | (1,2) , (4,2) |
| 2 | | 4 | | 1 | 3 | a | c | a | c | a | a | b | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 2 | | 4 | | 3 | 1 | a | d | d | c | c | c | b | c | + | (2,1) , (4,1) |
| 3 | | 1 | | 2 | 4 | b | c | a | b | a | a | d | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 3 | | 1 | | 4 | 2 | b | d | d | b | d | c | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 3 | | 2 | | 1 | 4 | b | c | a | c | a | a | d | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 3 | | 2 | | 4 | 1 | b | d | d | b | b | c | b | b | + | (1,2) , (4,2) |
| 3 | | 4 | | 1 | 2 | a | c | d | c | a | a | b | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 3 | | 4 | | 2 | 1 | a | d | d | c | a | a | b | a | + | (1,1) , (3,1) |
| 4 | | 1 | | 2 | 3 | b | c | d | b | d | a | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 4 | | 1 | | 3 | 2 | b | d | d | b | d | a | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 4 | | 2 | | 1 | 3 | b | c | d | c | d | a | d | d | + | (2,2) , (3,2) |
| 4 | | 2 | | 3 | 1 | b | d | d | b | b | a | b | b | + | (1,2) , (4,2) |
| 4 | | 3 | | 1 | 2 | b | c | d | c | b | a | b | b | + | (1,2) , (4,2) |
| 4 | | 3 | | 2 | 1 | b | d | d | c | b | a | b | b | + | (1,2) , (4,2) |

***d)  , a, b, c, e, f, g – произвольные числа;***

*Решение:*

Найдем минимумы в строках и столбцах.

Строки:

α1 = min(a,e); α2 = min(b,f); α3 = min(c,g);

Столбцы:

β1 = max(a,b,c); β2 = max(e,f,g); β3 = max(a,b,g); β4 = max(e,f,c); β5 = max(a,f,c); β6 = max(e,b,g); β7 = max(a,f,g); β8 = max(a,b,c);

Какое-то из значений β = βj будет равно максимальному значению из α = αi. Остальные значения βj >= α.

Например:

a=5, e=6, b=7, f=8, c=2, g=3;

α1 = min(a,e) = 5; α2 = min(b,f) = 7; α3 = min(c,g) = 2;

Тогда

β1 = max(a,b,c) = 7; β2 = max(e,f,g) = 8; β3 = max(a,b,g) = 7; β4 = max(e,f,c) = 8; β5 = max(a,f,c) = 8; β6 = max(e,b,g) = 7; β7 = max(a,f,g) = 8;β8 = max(a,b,c) = 7;

Тогда .

Оптимальная стратегия первого игрока вторая, а второго – первая, третья, шестая, восьмая.

***e)  ai , bj – произвольные числа, ci , dj – положительные числа.***

*Решение:*

Составим матрицу 2 на 2 из а = (10, 11), b = (10, 11), c = (11, 10), d = (11, 10). H = , , -> имеется седловая точка.

Возьмем, а = (2, -4, 5), b = (1, 4, -3, 2), с = (1, 1, 2), d = (3, 4, 5, 6)

Тогда матрица H =

Нижнее и верхнее значение игры:

* есть решение в чистых стратегиях. Оптимальная стратегия 1-го игрока = 3, второго игрока= 3.

Также для H такого вида есть доминирование и по строкам, и по столбцам. Здесь 3-я стратегия 1-го игрока доминирует все строчки, а 3-я стратегия 2-го игрока доминирует все столбцы.

Из вида элементов можно сделать вывод, что если – максимально для элементов из a и с, то тогда строка i будет больше или равна всех остальных строк, так как они строятся по одному виду, что и будет позволять доминировать строке над другими строками. Если же минимально для элементов b и d, то тогда это будет помогать доминировать столбцу над другими столбцами. А пересечение этих доминирующих столбцов и дает седловую точку. Значит при любых числах мы можем находить максимум и минимум из всей матрицы, т.е. если мы найдем максимальное число в таблице, то строка в которой она будет находится будет характеризовать доминирующую стратегию первого игрока, будет характеризовать i, а минимальный элемент матрицы будет характеризовать доминирующую стратегию второго игрока, будет характеризовать j. Покажем, что это работает на нашем примере. Максимальный элемент 9/6 – 3-я строка, минимальный элемент -7/6 – 3-й столбец. Пересечение дает седловую точку 2/7.

***f) n = m и для любых i, j, k, 1 ≤ i, j, k ≤ m, имеет место тождество hij + hjk + hki= 0.***

*Решение:*

.

.

*.*

Матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.

Пример:

Решение в чистых стратегиях:

***Стр 24-25 № 5***.

*Каждый из игроков имеет три фишки, которые может располагать в трёх позициях (в одной позиции можно расположить одну, две или три фишки). Фишка второго игрока “уничтожает” фишку противника, расположенную в той же позиции. Расстановка фишек производится в отсутствии информации о решении противника. Неуничтоженная фишка первого игрока “ прорывается” через соответствующую позицию. Составить и решить матрицную игру, считая выигрышем первого игрока (соответственно проигрышем второго игрока) общее число “прорвавшихся” фишек.*

*Решение:*

Составим множества чистых стратегий для обоих игроков: – для первого, – для второго. Множество состоит из 10 чистых стратегий:

1. – все фишки в позиции 1,
2. все фишки в позиции 2,
3. – все фишки в позиции 3,
4. – по одной фишке в каждой позиции,
5. – 2 фишки в позиции 1, одна – в позиции 2,
6. – 2 фишки в позиции 1, одна – в позиции 3,
7. – 2 фишки в позиции 2, одна – в позиции 1,
8. – 2 фишки в позиции 2, одна – в позиции 3,
9. – 2 фишки в позиции 3, одна – в позиции 1,
10. – 2 фишки в позиции 3, одна – в позиции 2.

Из таких же стратегий состоит множество .Составим матрицу выигрышей. Пусть выигрыш первого игрока (или проигрыш второго) – общее число “прорвавшихся” фишек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
|  | 3 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 |
|  | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
|  | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
|  | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 |
|  | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 |
|  | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
|  | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 |
|  | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

Нижнее и верхнее значения игры: , . Они не совпадают, следовательно, игра неразрешима в чистых стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования для нахождения смешанных стратегий.

Первая задача:

Вторая задача:

Решить эту пару задач можно, к примеру, симплекс-методом. В результате найдём оптимальные решения:

Цена игры: .Оптимальные смешанные стратегии игроков:

***Стр 25 № 6***

*Два игрока одновременно и независимо друг от друга показывают от одного до пяти пальцев. Если общее число указанных пальцев чётно, то сумму равную этому числу выигрывает первый игрок, если нечётно, то второй игрок. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.*

*Решение:*

Составим матрицу выигрышей:

H(i,j) =

= -5

= 6 !=

Значит, игра неразрешима в чистых стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования, предварительно добавив 10 ко всем элементам матрицы, чтобы они стали положительными:

Решив полученную пару задач (например, симплекс-методом), найдём оптимальные решения:

x1 = ; x2 = x3 = 0; x4 = ; x5 = ; y1 = ; y2 = y3 = 0; y4 = ; y5 = ;

Значение игры:

I = – 10 = 10 – 10 = 0

Оптимальные смешанные стратегии:

p1 = ; p2 = p3 = 0 ; p4 = ; p5 = ; q1 = ; q2 = q3 = 0 ; q4 = ; q5 =

***Стр 24-25 № 7***.

*Каждый игрок имеет по три фишки с номерами 1, 2, 3. Игроки независимо друг от друга кладут от одной до трёх фишек на стол цифрами вниз. Затем фишки переворачиваются. Выигрывает первый игрок, если сумма цифр всех фишек делится на три. Второй игрок выигрывает, если сумма делится на четыре. Определить чистые стратегии играков. Найти смешанные стратегии и значение игры.*

*Решение:*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Выкинет сумму фишек | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Построим матрицу H по такому принципу:

Делится на три - первый игрок  получает выигрыш +1, если на четыре –второй получает выигрыш +1 (т.е. первый получает –1). В противном случае каждому по 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 |
| -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 |

1) В чистых стратегиях.

Считаем, что первый игрок выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а второй игрок так, чтобы минимизировать выигрыш первого игрока.

a = -1, b = 1 => не разрешима в чистых стратегиях.  
2 ) В смешанных стратегиях.

В матрице присутствуют отрицательные элементы. Для упрощения расчетов добавим к элементам матрицы 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |

Построим пару двойственных задач линейного программирования:

x1+2x2+x4+2x5+x6 ≥ 1  
2x1+x3+x5 ≥ 1  
x2+2x3+x4+2x6 ≥ 1  
x1+x3+2x5+x6 ≥ 1  
2x1+x2+2x4+x5+x6 ≥ 1  
x1+2x3+x4+x5 ≥ 1

y1+2y2+y4+2y5+y6 ≤ 1  
2y1+y3+y5 ≤ 1  
y2+2y3+y4+2y6 ≤ 1  
y1+y3+2y5+y6 ≤ 1  
2y1+y2+2y4+y5+y6 ≤ 1  
y1+2y3+y4+y5 ≤ 1

Решая системы симплекс-методом, получим оптимальные решения:  
x1 = 2/7, x2 = 1/7, x3 = 2/7, x4 = 0, x5 = 1/7, x6 = 1/7

y1 = 1/4 , y2 = 0, y3 = 1/4, y4 = 0, y5 = 1/4, y6 = 1/4.

Значение игры: .

Соответственно оптимальные смешанные стратегии игроков будут равны:

p1 = 1 • 1/4 = 1/4  
p2 = 1 • 0 = 0  
p3 = 1 • 1/4 = 1/4  
p4 = 1 • 0 = 0  
p5 = 1 • 1/4 = 1/4  
p6 = 1 • 1/4 = 1/4  
  
q1 = 1 • 2/7 = 2/7  
q2 = 1 • 1/7 = 1/7  
q3 = 1 • 2/7 = 2/7  
q4 = 1 • 0 = 0  
q5 = 1 • 1/7 = 1/7  
q6 = 1 • 1/7 = 1/7

Поскольку ранее к элементам матрицы было прибавлено число 1, то вычтем это число из значения игры I = 1 – 1 = 0.

***Стр 24-25 № 8***.

*Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры*

*p= (), q= (), I=0,4 ,*

*решением матричной игры с выигрышами*

**

*Решение:*

Проверим, разрешима ли игра в чистых стратегиях.

Найдем верхнее и нижнее значения игры.

, следовательно игра не имеет седловой точки и не разрешима в чистых стратегиях.

Для определения оптимальных смешанных стратегий игроков и значения игры, построим пару двойственных задач линейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Заданной смешанной стратегии и значению игры соответствует вектор . Но этот вектор не удовлетворяет следующему ограничению: . Следовательно, этот вектор не может быть решением данной матричной игры.

Найдем решения этих задач при помощи вольфрама:

В итоге .

Далее можем найти решение матричной задачи:

***Стр 24-25 № 9***.

*Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры*

*p= (), q= (), I=4,*

*решением матричной игры с выигрышами*

*.*

*Решение:*

Найдем x, : .

Найдем y, : .

Данные смешанные стратегии и значение игры не являются решением матричной игры, т.к. полученные решения не удовлетворяют ограничениям двойственных задач, а именно не выполняется 3 ограничение для иксов.

***Стр. 29 № 11. Показать, что:***

*А)**если hi-1,j - 2 hij + hi+1,j ≤ 0, то в игре с матрицей H = (hij)nxm каждый игрок имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более двух чистых стратегий;*

*Решение:*

Из условия задачи: . Возможны два варианта.

Либо , то есть i-ая строка доминирует (i + 1)-ую и тогда

.

Либо (, то есть i-ая строка доминирует (i-1)-ую и тогда

.

В обоих случаях матрица выигрышей сокращается до размеров 2 × 2. Затем можно найти оптимальные стратегии игроков, а так как матрица имеет размеры 2 × 2, то у каждого игрока для оптимальной стратегии не более двух чистых стратегий.

*b) если hi-1,j - 2 hij + hi+1,j ≥0,  то в игре с матрицей H=(hij)nxm  первый игрок имеет оптимальную стратегию p, для которой pi = 0, .*

*Решение:*

Из условия задачи: ≥ 0. Возможны два варианта. Либо, то есть (i+1)-ая строка доминирует i-ую и тогда = 0, , . Либо (≥ 0, то есть (i -1)-ая строка доминирует i-ую и тогда , i = 2, n − 1, j = 1, m.